

Modelarea piețelor financiare prin metode martingale

Modelul Black-Scholes

Conf. dr. habil. Eduard Rotenstein

1 Comportamentul asimptotic al modelului Cox-Ross-Rubinstein

Determinăm formula de evaluare a prețului opțiunilor în modelul Black-Scholes, prin studierea comportamentului asimptotic al modelului CRR, alegând convenabil șirul de modele binomiale.

Fie $T > 0$ fixat, arbitrar ales și, pentru fiecare n de forma $n = 2^k$, considerăm partiția intervalului $[0, T]$ în n subintervale de lungime $\Delta_n = T/n$:

$$I_j = [j\Delta_n, (j+1)\Delta_n], \quad \forall j = \overline{0, n-1}.$$

Introducem, pentru început, factorul de acumulare modificat. Pentru aceasta, pe fiecare interval I_j vom nota cu r_n dobânda instantanee corespunzătoare acestui interval, iar prețul activului fără risc este dat de șirul $(B_n)_n$ de conturi de economii (*savings accounts*):

$$B_{j\Delta_n}^n = (1 + r_n)^j, \quad \forall j = \overline{0, n}.$$

Pentru fiecare n presupunem că prețul stocului S^n se poate aprecia pe intervalul I_j cu rata u_n sau deprecia cu rata d_n , putându-se reprezenta prin:

$$S_{(j+1)\Delta_n}^n = \xi_{j+1}^n S_{j\Delta_n}^n, \quad \forall j = \overline{0, n-1},$$

unde, pentru întregii fixați j și n , ξ_j^n este o variabilă aleatoare repartizată Bernoulli cu valorile u_n și d_n . Putem presupune că pentru fiecare n , variabilele aleatoare independente $\xi_j^n, j = \overline{1, n}$ sunt definite pe același câmp de probabilitate $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ și

$$\mathbb{P}\{\xi_j^n = u_n\} = p_n = 1 - \mathbb{P}\{\xi_j^n = d_n\}, \quad \forall j = \overline{1, n}, \quad \text{pentru } p_n \in (0, 1).$$

Observația 1.1 Pentru a asigura convergența modelului CRR la modelul Black-Scholes (BS) impunem următoarele condiții restrictive privitoare la comportamentul asimptotic al cantităților r_n, u_n și d_n (Parametrizarea CRR din Capitolul 2):

$$1 + r_n = e^{r\Delta_n}, \quad u_n = e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}}, \quad d_n = u_n^{-1}, \quad \text{unde } r \geq 0, \sigma > 0 \text{ sunt constante date.} \quad (1)$$

Remarcăm că, pentru fiecare $n > r^2\sigma^{-2}T$ avem că $d_n = u_n^{-1} < 1 + r_n < u_n$, iar modelul CRR (S^n, B^n, Φ^n) este fără arbitraj, pentru n suficient de mare. În plus, prin calcule elementare obținem:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{*,n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + r_n - d_n}{u_n - d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{r\Delta_n} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}} = \frac{1}{2} \quad \text{și} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{*,n} u_n}{1 + r_n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Studiem în continuare comportamentul asimptotic al prețului unei Opțiuni de Call European, atunci când $n \rightarrow \infty$. Presupunem $t = jT/2^k$ și considerăm șirul

$$m_n(t) = \frac{n(T-t)}{T}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

remarcând că $m_n(t) \in \mathbb{N}$ pentru $n = 2^l$ suficient de mare. În plus,

$$T - t = m_n(t) \Delta_n \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + r_n)^{-m_n(t)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-r\Delta_n m_n(t)} = e^{-r(T-t)}.$$

Cantitatea $m_n(t)$ reprezintă numărul de perioade de tranzacționare pe intervalul $[t, T]$ (pentru l suficient de mare). Definim, la momentul t , pentru activul cu risc $s := S_t = S_{T-m_n(t)\Delta_n}$ cantitatea

$$b_n(t) := \inf \left\{ j \in \mathbb{N}^* : su_n^j d_n^{m_n(t)-j} > K \right\}. \quad (2)$$

Teorema următoare furnizează formula clasică Black-Scholes de evaluare a prețului opțiunilor de vânzare și de cumpărare europene, instrumentul utilizat fiind comportamentul asimptotic al modelului CRR.

Teorema 1 Pentru fiecare punct diadic $t \in [0, T]$ are loc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=b_n(t)}^{m_n(t)} C_{m_n(t)}^j \left\{ S_t \bar{p}_n^j \bar{q}_n^{m_n(t)-j} - K \hat{r}_n^{-m_n(t)} p_{*,n}^j q_{*,n}^{m_n(t)-j} \right\} = C_t,$$

unde $q_{*,n} = 1 - p_{*,n}$ și $\bar{q}_n = 1 - \bar{p}_n$. În plus, C_t este dat de formula Black-Scholes:

$$C_t = S_t N(d_1(S_t, T-t)) - K e^{-r(T-t)} N(d_2(S_t, T-t)),$$

unde funcțiile d_1 și d_2 sunt definite astfel:

$$d_1(s, t) := \frac{\ln(s/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \quad \text{și} \quad d_2(s, t) := d_1(s, t) - \sigma\sqrt{t} = \frac{\ln(s/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}.$$

Funcția N este funcția de repartiție Gaussiană standard:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. Fie $S_t = s$ valoarea generică a prețului activului suport la momentul t . Primul pas constă în demonstrarea următoarei egalități:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=b_n(t)}^{m_n(t)} C_{m_n(t)}^j \bar{p}_n^j (1 - \bar{p}_n)^{m_n(t)-j} = N(d_1(s, T-t)). \quad (3)$$

Observăm inițial că

$$\sum_{j=b_n(t)}^{m_n(t)} C_{m_n(t)}^j \bar{p}_n^j (1 - \bar{p}_n)^{m_n(t)-j} = \mathbb{Q}\{b_n(t) \leq \gamma_n \leq m_n(t)\},$$

unde, pentru fiecare întreg n , variabila aleatoare $\gamma_n \sim \mathcal{B}(m_n(t), \bar{p}_n)$ sub măsura de probabilitate $\mathbb{Q}$. Notăm $\sigma_n := \sqrt{\bar{p}_n(1 - \bar{p}_n)}$ și considerăm variabila aleatoare normalizată

$$\bar{\gamma}_n = \frac{\gamma_n - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\gamma_n)}{\sqrt{\text{Var}_{\mathbb{Q}}(\gamma_n)}} = \frac{\gamma_n - m_n(t)\bar{p}_n}{\sqrt{m_n(t)\bar{p}_n(1 - \bar{p}_n)}} = \frac{\sum_{j=1}^{m_n(t)} (\zeta_j^n - \bar{p}_n)}{\sigma_n \sqrt{m_n(t)}},$$

unde ζ_j^n , $j = 1, \dots, n$ sunt variabile aleatoare independente, identic repartizate $\mathcal{B}(\bar{p}_n)$:

$$\mathbb{Q}\{\zeta_j^n = 1\} = \bar{p}_n = 1 - \mathbb{Q}\{\zeta_j^n = 0\}.$$

Teorema Limită Centrală conduce la convergență în repartiție a șirului de variabile aleatoare $\{\bar{\gamma}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\bar{\gamma}_n \xrightarrow{rep} Z \sim N(0, 1), \quad \text{pentru } n \rightarrow \infty.$$

În plus, avem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n(t) - m_n(t)\bar{p}_n}{\sqrt{m_n(t)\bar{p}_n(1 - \bar{p}_n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{m_n(t)\bar{p}_n^{-1}(1 - \bar{p}_n)} = +\infty.$$

Pe de altă parte, utilizând definiția lui $b_n(t)$, (2), obținem, datorită formei reprezentării Cox-Ross-Rubinstein, $u_n = e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}}$ și $d_n = u_n^{-1}$,

$$\begin{aligned} su_n^{b_n(t)} d_n^{m_n(t)-b_n(t)} &\geq K &\iff b_n(t) \ln u_n + (m_n(t) - b_n(t)) \ln d_n &\geq \ln(K/s) \\ &\iff b_n(t) (\ln u_n - \ln d_n) &\geq \ln(K/s) - m_n(t) \ln d_n \\ &\iff b_n(t) (\sigma\sqrt{\Delta_n} + \sigma\sqrt{\Delta_n}) &\geq \ln(K/s) + m_n(t) \sigma\sqrt{\Delta_n} \\ &\iff b_n(t) &\geq \frac{\ln(K/s) + m_n(t) \sigma\sqrt{\Delta_n}}{2\sigma\sqrt{\Delta_n}}, \end{aligned}$$

ultima relație devenind aproape egalitate pentru n suficient de mare. Prin urmare, obținem:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n(t) - m_n(t) \bar{p}_n}{\sqrt{m_n(t) \bar{p}_n (1 - \bar{p}_n)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(K/s) + m_n(t) \sigma \sqrt{\Delta_n}}{2\sigma \sqrt{\Delta_n}} - m_n(t) \bar{p}_n}{\sqrt{m_n(t) \bar{p}_n (1 - \bar{p}_n)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(K/s) + m_n(t) \sigma \sqrt{\Delta_n} (1 - 2\bar{p}_n)}{2\sigma \sqrt{m_n(t) \Delta_n \bar{p}_n (1 - \bar{p}_n)}} \\ &= \frac{\ln(K/s) - (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = -d_1(s, T-t) \end{aligned}$$

deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(t) \sqrt{\Delta_n} (1 - 2\bar{p}_n) = -(T-t) \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right).$$

Convergența în repartiție a șirului de variabile aleatoare $\{\bar{\gamma}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la o repartiție normală și relația $1 - N(x) = N(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, conduce la

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q} \{b_n(t) \leq \gamma_n \leq m_n(t)\} = 1 - N(-d_1(s, T-t)) = N(d_1(s, T-t)),$$

adică formula (3) este demonstrată. Într-o manieră similară, se demonstrează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=b_n(t)}^{m_n(t)} C_{m_n(t)}^j p_{*,n}^j (1 - p_{*,n})^{m_n(t)-j} = N(d_2(s, T-t)).$$

Membrul stâng al egalității anterioare se poate scrie sub forma

$$\sum_{j=b_n(t)}^{m_n(t)} C_{m_n(t)}^j p_{*,n}^j (1 - p_{*,n})^{m_n(t)-j} = \mathbb{Q} \{b_n(t) \leq \gamma_n^* \leq m_n(t)\}$$

unde, pentru fiecare întreg n , variabilele aleatoare $\gamma_n^* \sim B(m_n(t), p_{*,n})$ sub probabilitatea $\mathbb{Q}$. Prin calcule asemănătoare cazului anterior obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n(t) - m_n(t) p_{*,n}}{\sqrt{m_n(t) p_{*,n} (1 - p_{*,n})}} = -d_2(s, T-t) \quad \text{și}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{Q} \{b_n(t) \leq \gamma_n^* \leq m_n(t)\} = 1 - N(-d_2(s, T-t)) = N(d_2(s, T-t)),$$

demonstrația fiind în acest moment încheiată.

2 Modelul continuu Black-Scholes

Considerăm în cele ce urmează o piață financiară ideală, adică o piață în care tranzacțiile au loc în timp continuu, nu sunt restricții la credite sau depozite, dobânzile sunt egale, și nu sunt taxe sau costuri la tranzacționarea activelor financiare. Ca și în situațiile anterioare există două active tranzacționabile în acest model de piață financiară, tranzacțiile și dinamica prețului fiind date în timp continuu. Cele două active sunt caracterizate prin:

1. activul primar fără risc corespunde unui cont de economii (*savings account*, *a money market account*, *a risk-free bond*), pentru care dobânda instantanee, la vedere (*short-term interest rate*), r , este constantă pe intervalul $[0, T]$. Acest activ este continuu compus în timp, dinamica sa fiind guvernată de ecuația diferențială deterministă

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1,$$

cu soluția explicită $B_t = e^{rt}$, $t \in [0, T]$. Considerăm spre exemplu un instrument de trezorerie, nepurtător de dividende (*zero-coupon bond*), cu maturitatea T , al cărui preț la maturitate valorează o unitate monetară, și a cărui valoare la momentul $t \in [0, T]$ este

$$B(t, T) = e^{-r(T-t)}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Pentru orice moment T fixat, prețul bond-ului satisface ecuația diferențială

$$dB(t, T) = rB(t, T) dt, \quad B(0, T) = e^{-rT}.$$

2. activul cu risc (*underlying stock asset*), care va juca rolul activului suport pentru derivatele financiare tranzacționate, și a cărei evoluție în timp continuu este dată de procesul $(S_t)_{t \in [0, T]}$ ce satisface ecuația diferențială (pe scurt, EDS) liniară:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 > 0, \quad (4)$$

unde $\mu > 0$ este rata de apreciere a prețului activului, $\sigma > 0$ este volatilitatea și S_0 este prețul său inițial. Ecuația anterioară admite o soluție unică, a cărei formă explicită este dată prin următorul rezultat.

Propoziția 2.1 Ecuația (4), scrisă sub formă integrală

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_u du + \int_0^t \sigma S_u dW_u, \quad \forall t \in [0, T]$$

admite o soluție unică dată prin formula

$$S_t = S_0 \exp \left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5)$$

Demonstrație. Folosind formula lui Itô se arată că procesul stochastic definit prin (5) satisface ecuația (4). Fie

$$dX_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t.$$

Considerând funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = S_0 e^x$, avem că $S_t = g(X_t)$ și

$$\begin{aligned} dS_t = dg(X_t) &= \left(0 + S_0 e^{X_t} \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{1}{2} S_0 e^{X_t} \sigma^2 \right) dt + S_0 e^{X_t} \sigma dW_t \\ &= \left(S_t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \frac{1}{2} S_t \sigma^2 \right) dt + S_t \sigma dW_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t). \end{aligned}$$

Unicitatea soluției rezultă datorită faptului că ecuația (4) are coeficienții Lipschitz.

Observația 2.1 Este important de subliniat faptul că

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma \{W_u : u \leq t\} = \sigma \{S_u : u \leq t\} = \mathcal{F}_t^S,$$

adică filtrarea generată de prețul activului suport considerat coincide cu filtrarea naturală a mișcării Browniene W , adică $\mathbb{F}^S = \mathbb{F}^W = \mathbb{F}$.

Definim acum procesul auxiliar

$$M_t := \exp \left(\sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right), \quad \forall t \in [0, T] \quad (6)$$

și demonstrăm că el este un caz particular de proces stochastic.

Propoziția 2.2 Procesul M definit prin (6) este o martingală, sub măsura de probabilitate $\mathbb{P}$, în raport cu filtrarea $\mathbb{F}$.

Demonstrație. Observăm că

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(e^{\sigma(W_t - W_u)} | \mathcal{F}_u \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(e^{\sigma(W_t - W_u)} \right) = \exp \left(\frac{1}{2} \sigma^2 (t - u) \right)$$

deoarece $W_t - W_u \sim N(0, t - u)$. Cum

$$S_t = e^{\mu t} M_t,$$

avem, pentru fiecare $u \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_t | \mathcal{F}_u) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{\mu t} M_t | \mathcal{F}_u) = e^{\mu t} M_u = S_u e^{\mu(t-u)}.$$

Prin urmare, prețul activului suport S este o martingală sub probabilitatea $\mathbb{P}$, în raport cu filtrarea $\mathbb{F}$, dacă și numai dacă rata de apreciere μ este 0.

Dacă $\mu > 0$ (respectiv, $\mu < 0$) atunci obținem

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_t | \mathcal{F}_u) > S_u \text{ (resp. } < S_u), \text{ pentru } \forall t > u,$$

adică prețul stocului (activului suport) S este o submartingală (respectiv, o supramartingală) sub măsura de probabilitate subiectivă $\mathbb{P}$.

3 Strategii de schimb autofinanțante; măsuri martingale pentru o piață instantanee, la vedere (*spot market*)

În cele ce urmează vom utiliza tot instrumentul portofoliilor replicante pentru a modela prețul Opțiunilor Call și Put Europene. Ideea avută în vedere vizează asigurarea lipsei oportunităților de arbitraj în piața financiară considerată, la fel ca și în cazul modelului binomial. Vom studia apoi modul în care putem schimba, în mod convenabil, măsura de probabilitate subiectivă, pentru a obține o unică măsură de probabilitate, în raport cu care vom evalua prețurile derivatelor financiare tranzacționabile.

Definiția 1

- Prin strategie de schimb înțelegem o pereche de procese stochastice progresiv măsurabile $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, definite pe spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- Spunem că o strategie de schimb $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ este autofinanțantă pe intervalul $[0, T]$ dacă valoarea portofoliului

$$V_t(\phi) := \phi_t^1 S_t + \phi_t^2 B_t, \quad \forall t \in [0, T]$$

satisfacă condiția

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u^1 dS_u + \int_0^t \phi_u^2 dB_u, \quad \forall t \in [0, T],$$

prima integrală fiind interpretată în sens Itô, iar a doua în sens Lebesgue.

(Vom nota cu Φ mulțimea strategiilor autofinanțante, mulțime ce nu coincide cu $\mathbb{R}^2$, după cum se poate observa din modelul de suicid al lui Harrison & Pliska, 1981).

În mod uzual, considerăm activul neriscont ca factor de actualizare a prețurilor și vom nota $S^* := S/B$ prețul actualizat al acțiunilor de stoc (*discounted stock price*). Obținem că, pentru orice $t \in [0, T]$,

$$S_t^* = S_0^* \exp \left(\sigma W_t + \left(\mu - r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right),$$

adică, echivalent, S^* este soluția unică a EDS liniare

$$dS_t^* = (\mu - r) S_t^* dt + \sigma S_t^* dW_t, \quad S_0^* = S_0,$$

iar proprietatea martingală a lui S^* sub $\mathbb{P}$ poate fi analizată în aceeași manieră ca și în cazul lui S .

Definiția 2 O măsură de probabilitate $\mathbb{P}^*$ pe $(\Omega, \mathcal{F})$, echivalentă cu $\mathbb{P}$, se numește măsură martingală pentru S^* dacă S^* este o martingală locală sub $\mathbb{P}^*$.

Definiția 3 O măsură de probabilitate $\mathbb{P}^*$ pe $(\Omega, \mathcal{F})$, echivalentă cu $\mathbb{P}$, se numește o măsură martingală pentru piața la vedere (*spot martingale measure*) dacă valoarea actualizată a portofoliului $V_t^*(\phi) := V_t(\phi) / B_t$ oricărei strategii autofinanțante ϕ este o martingală locală sub $\mathbb{P}^*$.

Are loc următorul rezultat de caracterizare a măsurilor martingale din piețele la vedere.

Lema 3.1 O măsură de probabilitate pe câmpul $(\Omega, \mathcal{F})$ este o măsură martingală spot dacă și numai dacă este o măsură martingală pentru S^* .

Demonstrație. Fie o strategie de schimb $\phi \in \Phi$. Utilizăm formula lui Itô și obținem (deoarece funcția deterministă ce guvernează activul sigur conduce și la dinamica $dB_t^{-1} = -rB_t^{-1}dt$):

$$\begin{aligned} dV_t^* &= d(V_t B_t^{-1}) = V_t dB_t^{-1} + B_t^{-1} dV_t = (\phi_t^1 S_t + \phi_t^2 B_t) dB_t^{-1} + B_t^{-1} (\phi_t^1 dS_t + \phi_t^2 dB_t) \\ &= \phi_t^1 (S_t dB_t^{-1} + B_t^{-1} dS_t) + \phi_t^2 (B_t dB_t^{-1} + B_t^{-1} dB_t) = \phi_t^1 d(S_t B_t^{-1}) + \phi_t^2 (-B_t r B_t^{-1} + B_t^{-1} r B_t) dt \\ &= \phi_t^1 dS_t^*, \end{aligned}$$

adică, scriind sub formă integrală, avem

$$V_t^*(\phi) = V_0^*(\phi) + \int_0^t \phi_u^1 dS_u^*, \quad \forall t \in [0, T].$$

Cum integrala stocastică Itô este o martingală locală obținem rezultatul dorit.

Prezentăm în cele ce urmează un rezultat fundamental, care ne descrie modul de schimbare a măsurilor de probabilitate (echivalente) pe spațiul de probabilitate considerat. De asemenea, vom obține un proces Wiener transformat, în raport cu care dinamica prețului actualizat devine un proces martingal, sub noua măsură de probabilitate martingală construită.

Lema 3.2 *Unica măsură martingală $\mathbb{P}^*$ pentru S^* este dată de derivata Radon-Nikodym:*

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp \left(\frac{r - \mu}{\sigma} W_T - \frac{1}{2} \frac{(r - \mu)^2}{\sigma^2} T \right), \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

Sub această măsură martingală $\mathbb{P}^*$, prețul actualizat S^* satisface ecuația diferențială stocastică liniară

$$dS_t^* = \sigma S_t^* dW_t^*,$$

iar procesul

$$W_t^* = W_t - (r - \mu) \sigma^{-1} t, \quad t \in [0, T]$$

este o mișcare Browniană pe $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$.

Prețul actualizat S^* este, sub măsura $\mathbb{P}^*$, o martingală strict pozitivă deoarece, pentru orice $t \in [0, T]$,

$$S_t^* = S_0^* \exp \left(\sigma W_t^* - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right) = S_0^* M_t^*,$$

unde M^* este definit prin formula (6), cu procesul Wiener W înlocuit de W^* . Prețul activului suport la momentul t este deci dat de formula explicită

$$S_t = S_t^* B_t = S_0 \exp \left(\sigma W_t^* + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right),$$

adică el verifică EDS liniară

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^*, \quad S_0 > 0.$$

Este important de subliniat faptul că

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}^W = \mathbb{F}^{W^*} = \mathbb{F}^S = \mathbb{F}^{S^*},$$

ceea ce spune că informațiile din piața financiară aduse de către cele două procese Wiener (și, în consecință, de procesul prețului și procesul actualizat în raport cu un activ neriscont, determinist) coincid.

Definiția 4 *O strategie $\phi \in \Phi$ se numește $\mathbb{P}^*$ -admisibilă dacă $V_t^*(\phi) := B_t^{-1} V_t(\phi)$ este o martingală sub $\mathbb{P}^*$. Notăm cu $\Phi(\mathbb{P}^*)$ mulțimea strategiilor $\mathbb{P}^*$ -admisibile. Tripletul*

$$\mathcal{M}_{BS} := (S, B, \Phi(\mathbb{P}^*))$$

este numit **modelul de piață fără arbitraj Black-Scholes**.

Următorul rezultat oferă o metodă de calcul a prețului de arbitraj, folosind metoda mediei condiționată sub măsura martingală, a oricărui derivat financiar european.

Lema 3.3 *Fie X un derivat financiar european, replicabil, cu momentul de maturitate T . Dacă ne situăm în modelul $\mathcal{M}_{BS}$, atunci, la fiecare moment anterior maturității, prețul său corect, de arbitraj (notat cu $\pi_t(X)$) este dat de:*

$$\pi_t(X) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Demonstrație. Fie ϕ o strategie admisibilă, replicantă pentru derivatul financiar X . Pentru orice $t \in [0, T]$, avem, conform Lemei (3.1),

$$\frac{\pi_t(X)}{B_t} = \frac{V_t(\phi)}{B_t} = V_t^*(\phi) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (V_T^*(\phi) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (B_T^{-1} V_T(\phi) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t),$$

adică $\pi_t(X) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t)$, iar demonstrația este încheiată.

4 Formula Black-Scholes de evaluare a prețului în timp continuu

Vom considera o opțiune de tip Call European având ca activ suport un activ primar (stoc) S ce nu plătește dividende, cu maturitatea T și preț de exercitare K . Funcția de plată (și prețul opțiunii) la momentul T este, așa cum se știe, $(S_T - K)^+$. Fie funcția $c : \mathbb{R}_+ \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$c(s, t) := sN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2), \quad (7)$$

unde N este funcția de repartiție normală standard și

$$d_{1,2} := d_{1,2}(s, t) = \frac{\ln(s/K) + (r \pm \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}. \quad (8)$$

Notăm în continuare prin C_t prețul de arbitraj (*arbitrage price, fair price*) al unui Call European, considerat în modelul continuu Black-Scholes.

Enunțăm și demonstrăm în cele ce urmează rezultatul principal al acestei secțiuni.

Teorema 2 *La fiecare moment $t < T$, prețul de arbitraj al Opțiunii de Call European (cu maturitatea T și prețul de exercitare K) este dat de formula*

$$C_t = c(S_t, T - t), \quad \forall t \in [0, T],$$

unde funcția $c : \mathbb{R}_+ \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin formula (7). Mai explicit, avem, pentru fiecare $t < T$,

$$C_t = S_t N(d_1(S_t, T - t)) - KB(t, T) N(d_2(S_t, T - t)), \quad (9)$$

cu cantitățile $d_{1,2}$ definite prin (8). În plus, unica strategie replicantă admisibilă $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ pentru Opțiunea de Call European este

$$\phi_t^1 = \frac{\partial c}{\partial s}(S_t, T - t) = N(d_1(S_t, T - t))$$

și

$$\phi_t^2 = e^{-rt}(c(S_t, T - t) - \phi_t^1 S_t).$$

Demonstrație. Vom prezenta două metode de demonstrație: **prima metodă** se bazează pe determinarea directă a strategiei replicante alături de prețul opțiunii, iar cea de **a doua abordare** utilizează formula de evaluare în caz de risc neutru; având determinat prețul opțiunii putem obține apoi portofoliul replicant.

Metoda 1. Presupunem că prețul opțiunii, notat cu C_t , se poate reprezenta sub forma $C_t = v(S_t, t)$, pentru o funcție $v : \mathbb{R}_+ \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ și că strategia replicantă căutată are forma

$$\phi_t = (\phi_t^1, \phi_t^2) = (g(S_t, t), h(S_t, t)),$$

pentru $t \in [0, T]$, unde $g, h : \mathbb{R}_+ \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții necunoscute. Cum strategia ϕ este autofinanțantă, atunci valoarea portofoliului

$$V_t(\phi) = g(S_t, t)S_t + h(S_t, t)B_t = v(S_t, t) \quad (10)$$

satisface ecuația diferențială

$$\begin{aligned} dV_t(\phi) &= g(S_t, t)dS_t + h(S_t, t)dB_t \\ &= (\mu - r)S_t g(S_t, t)dt + \sigma S_t g(S_t, t)dW_t + rv(S_t, t)dt \end{aligned} \quad (11)$$

deoarece din a doua egalitate din (10) obținem că

$$\phi_t^2 = h(S_t, t) = B_t^{-1}(v(S_t, t) - g(S_t, t)S_t).$$

Căutăm în continuare funcția v ca aparținând spațiului $C^{2,1}((0, \infty) \times (0, T))$. Aplicăm formula lui Itô și obținem:

$$dv(S_t, t) = \left(v'_t(S_t, t) + \mu S_t v'_s(S_t, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 v''_{ss}(S_t, t) \right) dt + \sigma S_t v'_s(S_t, t) dW_t.$$

Împreună cu (11) obținem, aplicând formula lui Itô procesului $Y := v(S_t, t) - V_t(\phi)$,

$$\begin{aligned} dY_t &= \left(v'_t(S_t, t) + \mu S_t v'_s(S_t, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 v''_{ss}(S_t, t) \right) dt + \sigma S_t v'_s(S_t, t) dW_t \\ &\quad + (r - \mu) S_t g(S_t, t) dt - \sigma S_t g(S_t, t) dW_t - rv(S_t, t) dt. \end{aligned}$$

Dar, conform formulei (10), $dY_t = 0$ și, datorită unicității descompunerii canonice a semimartingalelor continue, termenul de difuzie din descompunerea anterioară a procesului Y dispare. Aceasta înseamnă că, pentru orice $t \in [0, T]$,

$$\int_0^t \sigma S_u (g(S_u, u) - v'_s(S_u, u)) dW_u = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

sau, echivalent, în virtutea proprietăților integralei Itô (proprietatea de izometrie),

$$\int_0^T S_u^2 (g(S_u, u) - v'_s(S_u, u))^2 du = 0,$$

adică e necesar și suficient ca funcția g să satisfacă relația

$$g(s, t) = v'_s(s, t), \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, T]. \quad (12)$$

Obținem, prin urmare, reprezentarea lui Y :

$$Y_t = \int_0^t \left\{ v'_t(S_u, u) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_u^2 v''_{ss}(S_u, u) + r S_u v'_s(S_u, u) - r v(S_u, u) \right\} du.$$

Rezultă că procesul Y se anulează atunci când funcția v satisface următoarea ecuație cu derivate parțiale, numită și *EDP Black-Scholes* :

$$v'_t(s, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 v''_{ss}(s, t) + r s v'_s(s, t) - r v(s, t) = 0. \quad (13)$$

Cum

$$C_T = v(S_T, T) = (S_T - K)^+,$$

impunem și condiția terminală $v(s, T) = (s - K)^+$, pentru $s \in \mathbb{R}_+$. Se verifică, prin calcul direct, că funcția

$$v(s, t) := c(s, T - t)$$

verifică problema de mai sus. Într-adevăr, dacă notăm, pentru simplitate, $z = t$ sau $z = s$, după caz, avem, pentru $i = 1, 2$:

$$\frac{\partial N(d_i)}{\partial z} = \frac{\partial N(d_i)}{\partial d_i} \frac{\partial d_i}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial d_i} \int_{-\infty}^{d_i} e^{-x^2/2} dx \cdot \frac{\partial d_i}{\partial z} = \frac{e^{-d_i^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial d_i}{\partial z}.$$

Se verifică imediat că avem următoarea formă pentru derivatele parțiale, în raport cu timpul, pentru funcțiile $d_{1,2} = d_{1,2}(s, t)$:

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} = \frac{d_1}{2(T-t)} - \frac{1}{\sqrt{T-t}} \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \quad \text{și} \quad \frac{\partial d_2}{\partial t} = \frac{d_2}{2(T-t)} - \frac{1}{\sqrt{T-t}} \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right).$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= s \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial t} - r K e^{-r(T-t)} N(d_2) - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial t} \\ &= \frac{s e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{d_1}{2(T-t)} - \frac{1}{\sqrt{T-t}} \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \right) - r K e^{-r(T-t)} N(d_2) \\ &\quad - \frac{K e^{-r(T-t)} e^{-d_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{d_2}{2(T-t)} - \frac{1}{\sqrt{T-t}} \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

De asemenea, deoarece

$$\frac{\partial d_i}{\partial s} = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}}, \quad i = 1, 2,$$

obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} &= N(d_1) + s \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial s} - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial s} \\ &= N(d_1) + \frac{e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} - K e^{-r(T-t)} \frac{e^{-d_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Diferențiem încă o dată și deducem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} &= \frac{e^{-d_1^2/2}}{s\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} - \frac{d_1 e^{-d_1^2/2}}{s\sigma^2\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} + \frac{K e^{-r(T-t)} e^{-d_2^2/2}}{s^2\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} + \frac{K e^{-r(T-t)} d_2 e^{-d_2^2/2}}{s^2\sigma^2\sqrt{2\pi}\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{2}{s^2\sigma^2} \left(\frac{se^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} - \frac{d_1}{2(T-t)} \right) + \frac{K e^{-r(T-t)} e^{-d_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} + \frac{d_2}{2(T-t)} \right) \right).\end{aligned}\quad (16)$$

Înlocuim (9), (14), (15) și (16) în membrul stâng al EDP Black-Scholes (13), găsim că este verificată această ecuație:

$$\begin{aligned}v'_t(s, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 v''_{ss}(s, t) + rsv'_s(s, t) - rv(s, t) &= \frac{se^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{d_1}{2(T-t)} - \frac{1}{\sqrt{T-t}} \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \right) \right) - rK e^{-r(T-t)} N(d_2) \\ &\quad - \frac{K e^{-r(T-t)} e^{-d_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{d_2}{2(T-t)} - \frac{1}{\sqrt{T-t}} \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) \right) + \frac{se^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} - \frac{d_1}{2(T-t)} \right) \\ &\quad + \frac{K e^{-r(T-t)} e^{-d_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} + \frac{d_2}{2(T-t)} \right) + rsN(d_1) + rs \frac{e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} - rsK e^{-r(T-t)} \frac{e^{-d_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}} \\ &\quad - rsN(d_1) - rK e^{-r(T-t)} N(d_2) = 0\end{aligned}$$

Rămâne doar de justificat că strategia replicantă ϕ dată de formulele:

$$\phi_t^1 := g(S_t, t) = v'_s(S_t, t), \quad \phi_t^2 := h(S_t, t) = B_t^{-1}(v(S_t, t) - g(S_t, t)S_t),$$

este o strategie admisibilă. Pentru început arătăm că ea este auto-finanțantă. Pentru aceasta, verificăm că

$$dV_t(\phi) = \phi_t^1 dS_t + \phi_t^2 dB_t.$$

Deoarece $V_t(\phi) = \phi_t^1 S_t + \phi_t^2 B_t = v(S_t, t)$, aplicând formula lui Itô obținem

$$dV_t(\phi) = v'_s(S_t, t) dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v''_{ss}(S_t, t) dt + v'_t(S_t, t) dt,$$

și, utilizând (13), aceasta devine

$$dV_t(\phi) = v'_s(S_t, t) dS_t + rv(S_t, t) dt - rS_t v'_s(S_t, t) dt.$$

Prin urmare,

$$dV_t(\phi) = \phi_t^1 dS_t + rB_t \frac{v(S_t, t) - S_t \phi_t^1}{B_t} dt = \phi_t^1 dS_t + \phi_t^2 dB_t,$$

adică strategia construită anterior este auto-finanțantă. Pentru admisibilitatea sa, verificăm că

$$V_t^*(\phi) = V_0^*(\phi) + \int_0^t v'_s(S_u, u) dS_u^*,$$

este o martingală sub măsura martingală $\mathbb{P}^*$. Prin calcul direct se obține că

$$v'_s(s, t) = N(d_1(s, T-t))$$

pentru fiecare pereche $(s, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, T]$ și

$$V_t^*(\phi) = V_0^*(\phi) + \int_0^t \sigma S_u N(d_1(S_u, T-u)) dW_u^* =: V_0^*(\phi) + \int_0^t \zeta_u dW_u^*,$$

adică $V^*(\phi)$ este o $\mathbb{P}^*$ -martingală (este chiar o martingală de pătrat integrabilă). Egalitatea

$$c'_s(S_t, T-t) = N(d_1(S_t, T-t))$$

se verifică prin calcularea directă a derivatei parțiale în raport cu s a funcției preț c .

Metoda 2. Punem accent prin această abordare pe evaluarea directă a funcției c . Arătăm că derivatul financiar $X = (S_T - K)^+$ este replicabil în modelul Black Scholes. Acest lucru rezultă din teorema de reprezentare a martingalelor, combinată cu integrabilitatea, sub probabilitatea $\mathbb{P}^*$, a variabilei aleatoare $X^* = B_T^{-1}(S_T - K)^+$.

Conform teoremei de reprezentare rezultă existența unui proces predictibil θ astfel încât integrala stochastică

$$V_t^* = V_0^* + \int_0^t \theta_u dW_u^*, \quad \forall t \in [0, T]$$

este o $\mathbb{P}^*$ -martingală continuă, de pătrat integrabilă și

$$X^* = B_T^{-1}(S_T - K)^+ = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} X^* + \int_0^T \theta_u dW_u^* = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} X^* + \int_0^T h_u dS_u^*, \quad \text{unde } h_t := \frac{\theta_t}{\sigma S_t^*}.$$

Notăm $V_t := B_t V_t^*$ și considerăm strategia dată de

$$\phi_t^1 := h_t \quad \text{și} \quad \phi_t^2 := V_t^* - h_t S_t^* = B_t^{-1}(V_t - h_t S_t).$$

Verificăm că această strategie ϕ este auto-finanțantă. Avem:

$$\begin{aligned} dV_t(\phi) &= d(B_t V_t^*) = B_t dV_t^* + r V_t^* B_t dt \\ &= B_t h_t dS_t^* + r V_t dt = B_t h_t (B_t^{-1} dS_t - r B_t^{-1} S_t dt) + r V_t dt \\ &= h_t dS_t + r (V_t - h_t S_t) dt = \phi_t^1 dS_t + \phi_t^2 dB_t. \end{aligned}$$

Este evident faptul că $V_T(\phi) = V_T = (S_T - K)^+$ și că ϕ este strategie admisibilă replicantă pentru derivatul financiar X , deci Opțiunea de Call European este replicabilă în modelul de piață $\mathcal{M}_{BS}$. Evaluăm în cele ce urmează prețul de arbitraj al lui X folosind formula de evaluare la risc neutru. Deoarece $\mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_t^S$ pentru fiecare $t \in [0, T]$, avem

$$C_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left((S_T - K)^+ B_T^{-1} | \mathcal{F}_t^S \right) = c(S_t, T - t) \quad (17)$$

pentru o funcție $c : \mathbb{R}_+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Cea de a doua egalitate din relația de mai sus are loc invocând proprietatea Markov a procesului stochastic S . Din proprietățile mediei condiționate rezultă că

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t^S \right) = H(S_t, T - t), \quad (18)$$

unde funcția $H(s, T - t)$ este definită de

$$H(s, T - t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left\{ \left(s \exp(\sigma(W_T^* - W_t^*) + (r - \sigma^2/2)(T - t)) - K \right)^+ \right\}$$

pentru fiecare pereche $(s, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, T]$. Pentru $t = 0$ obținem, din formula (17),

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}((S_T - K)^+ B_T^{-1}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(S_T B_T^{-1} \mathbf{1}_D) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(K B_T^{-1} \mathbf{1}_D) =: J_1 - J_2,$$

unde $D := \{S_T > K\}$. Pentru cantitățile J_1 și J_2 avem estimările ce urmează:

$$\begin{aligned} J_2 &= e^{-rT} K \mathbb{P}^* \{S_T > K\} = e^{-rT} K \mathbb{P}^* \{S_0 \exp(\sigma W_T^* + (r - 1/2\sigma^2)T) > K\} \\ &= e^{-rT} K \mathbb{P}^* \{-\sigma W_T^* < \ln(S_0/K) + (r - 1/2\sigma^2)T\} \\ &= e^{-rT} K \mathbb{P}^* \left\{ \xi < \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right\} \\ &= e^{-rT} K N(d_2(S_0, T)) \end{aligned}$$

deoarece v.a. $\xi = -W_T/\sqrt{T} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ sub măsura martingală $\mathbb{P}^*$.

Pentru a doua integrală obținem că

$$J_1 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(S_T B_T^{-1} \mathbf{1}_D) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(S_T^* \mathbf{1}_D). \quad (19)$$

Este convenabil să introducem pe spațiul $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ măsura de probabilitate $\bar{\mathbb{P}}$, definită prin

$$\frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*} = \exp\left(\sigma W_T^* - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right), \quad \mathbb{P}^*\text{-a.s.,}$$

situație în care procesul $\bar{W}_t = W_t^* - \sigma t$ este o mișcare Browniană pe $(\Omega, \mathcal{F}, \bar{\mathbb{P}})$. În plus,

$$S_T^* = S_0 \exp \left(\sigma \bar{W}_T + \frac{1}{2} \sigma^2 T \right),$$

de unde, formula (19) devine

$$\begin{aligned} J_1 &= S_0 \bar{\mathbb{P}} \{ S_T^* > K B_T^{-1} \} = S_0 \bar{\mathbb{P}} \left\{ S_0 \exp \left(\sigma \bar{W}_T + \frac{1}{2} \sigma^2 T \right) > K e^{-rT} \right\} \\ &= S_0 \bar{\mathbb{P}} \{ -\sigma \bar{W}_T < \ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T \} = S_0 N(d_1(S_0, T)). \end{aligned}$$

Concluzionând, obținem că prețul la momentul 0 al OCE devine

$$C_0 = c(S_0, T) = S_0 N(d_1(S_0, T)) - K e^{-rT} N(d_2(S_0, T)),$$

unde

$$d_{1,2}(S_0, T) := \frac{\ln(S_0/K) + \left(r \pm \frac{1}{2} \sigma^2\right) T}{\sigma \sqrt{T}}.$$

Formula de evaluare pentru fiecare moment $0 < t < T$ se poate deduce din formula (18).

Observația 4.1 Se observă că în formula de evaluare Black Scholes nu apare rata de apreciere μ , după cum și în dinamica lui S sub măsura martingală $\mathbb{P}^*$ nu apare acest coeficient. Același lucru se întâmplă dacă presupunem că rata de apreciere depinde de timp sau mai mult, este chiar un proces stochastic adaptat filtrării naturale.

Observația 4.2 Se poate formula următoarea întrebare: de ce ar fi nevoie să rezolvăm numeric EDP (13), din moment ce avem la dispoziție soluția sa explicită? Această soluție explicită este cunoscută doar pentru cazul Opțiunilor de Call și Put European. Pentru alte tipuri de derivate financiare, deși EDP este aceeași, condiția terminală diferită duce la imposibilitatea determinării formulei explicite în cazul general. Pentru analiză, prezentăm în cele ce urmează o schemă numerică pentru cazul în care este disponibilă și o formulă explicită a soluției. Putem astfel verifica precizia rezultatului obținut prin metoda de proximare.

Reamintim, pentru început, EDP Black-Scholes:

$$\begin{cases} v_t'(s, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 v_{ss}''(s, t) + r s v_s'(s, t) - r v(s, t) = 0, & s > 0, \quad t \in (0, T) \\ v(s, T) = v_0(s), & s > 0. \end{cases}$$

Această ecuație este o EDP parabolică, care poate fi transformată în ecuația căldurii, cu o condiție inițială dată. Această transformare se realizează în modul următor:

- transformarea variabilelor: avem o condiție terminală, la momentul de expirare a opțiunii, T , fapt ce conduce la transformarea

$$\tau := T - t,$$

adică noua variabilă poate fi interpretată drept timpul ce rămâne până la expirarea opțiunii.

- variabila S ce dă prețul activului suport este pozitivă. Noua variabilă va fi

$$x := \ln(s/K).$$

Valori ale lui x apropiate de 0 corespund prețurilor activelor suport ce sunt apropiate de prețul de exercitare al opțiunii, K . Valori negative ale lui x corespund prețurilor activului suport mai mici decât prețul de exercitare (supra paritate, out of the money). Valori pozitive ale lui x corespund prețurilor activului suport mai mari decât prețul de exercitare (sub paritate, in the money). Alegerea variabilei de tip logaritmic este mai convenabilă din punct de vedere al abordării numerice a soluției.

- transformarea către ecuația căldurii: folosind transformările anterioare, ecuația poate fi adusă la ecuația căldurii prin:

$$u(x, \tau) := e^{\alpha x + \beta \tau} v(s, t),$$

coeficienții fiind determinați astfel încât să găsim ecuația dorită. O alegere corectă a constantelor este:

$$\alpha := \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \quad \beta := \frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r^2}{2\sigma^2}.$$

Obținem astfel noua formă a ecuației:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \in (0, T).$$

Condiția terminală devine:

$$u_0(x) = u(x, 0) = e^{\alpha x} v(s, T) = e^{\alpha x} v_0(s) = e^{\alpha x} v_0(Ke^x).$$

Discretizarea pentru obținerea soluției.

Din punct de vedere numeric, vom rezolva problema pentru $x \in [-L, L]$, pentru L o constantă de mărginire, suficient de mare. Acest interval nu va fi modificat la alegerea unei opțiuni cu un alt preț de exercitare. Impunem condiții de frontieră pentru $x = -L$ și $x = L$. Aceste valori ale lui x corespund prețurilor activului suport foarte mici, apropiate de 0 (dacă $x = -L$) sau foarte mari (dacă $x = L$). Pentru aceste valori la limită se folosesc aproximările:

$$\begin{aligned} v &\sim 0 \quad \text{pentru} \quad s \sim 0 \\ v &\sim se - Ke^{-r\tau} \quad \text{pentru} \quad s \sim +\infty. \end{aligned}$$

În ceea ce privește discretizarea ecuației căldurii, există două posibilități: o schemă explicită (1) și una implicită (2), cea din urmă ducând la rezolvarea unui sistem de ecuații liniare pe fiecare interval de timp. Avem astfel schemele:

$$\left| \begin{aligned} &u_i^j \sim u(x_i, \tau_j) \\ 1. \quad &\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{k} \\ 2. \quad &\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{k} \end{aligned} \right.$$

Ca o consecință imediată a teoremei precedente, rezultatul următor furnizează o metoda directă de calculare a prețului corect al opțiunilor de vânzare de tip european.

Lema 4.1 (Formula de paritate put-call) Prețurile de arbitraj al Opțiunilor Put și Call Europene, ce au aceeași dată de expirare T și același preț de exercitare K satisfac relația

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)} \quad (20)$$

pentru fiecare $t \in [0, T]$.

Teorema 3 În modelul standard Black Scholes, prețul unui Put European cu prețul de exercitare K la momentul de maturitate T este, pentru orice moment $t < T$,

$$P_t = KB(t, T)N(-d_2(S_t, T-t)) - S_tN(-d_1(S_t, T-t)).$$

Demonstrație. Demonstrația este o consecință imediată a formulei (9) ce dă prețul unei OCE și formula de paritate (20) pentru piețe financiare Black Scholes, în timp continuu.

5 EDP Black Scholes

Extindem în această secțiune procedura de evaluare a prețului de la opțiuni de cumpărare și vânzare europene la orice tip de derivat financiar de tip european, adică o variabilă aleatoare $\mathcal{F}_T$ -măsurabilă. În principiu formula Feynman-Kač, prezentată în continuare, exprimă soluția unei ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic drept media condiționată a unui proces guvernat de o mișcare Browniană.

Teorema 4 Fie W o mișcare Browniană 1-dimensională definită pe un câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pentru o funcție măsurabilă Borel $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definim funcția $u : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u(x, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(e^{-r(T-t)} h(W_T) | W_t = x \right), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]. \quad (21)$$

Presupunem că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} |h(x)| dx < \infty$$

pentru o constantă $a > 0$. Funcția u este definită pentru $0 < T - t < 1/2a$, $x \in \mathbb{R}$ și are derivate de orice ordin. În particular, $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T))$ și satisface EDP:

$$-\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - ru(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T),$$

cu condiția terminală $u(x, T) = h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. Vezi Karatzas & Shreve [3].

Rezultatul principal al acestei secțiuni este prezentat în cele ce urmează.

Teorema 5 Fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție măsurabilă Borel astfel încât variabila aleatoare $X = g(S_T)$ este $\mathbb{P}^*$ -integrabilă. Atunci, prețul de arbitraj, în modelul de piață $\mathcal{M}_{BS}$, al derivatului financiar X (cu maturitatea T) este dat de $\pi_t(X) = v(S_t, t)$, unde funcția $v : \mathbb{R}_+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ verifică EDP Black-Scholes:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + rs \frac{\partial v}{\partial s} - rv = 0, \quad \forall (s, t) \in (0, \infty) \times (0, T), \quad (22)$$

cu condiția terminală $v(s, T) = g(s)$.

Demonstrație. Obținem (22) din formula de evaluare la risc neutru. Prețul $\pi_t(X)$ satisface

$$\pi_t(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left(e^{-r(T-t)} g(S_T) | \mathcal{F}_t^S \right) = v(S_t, t) \quad (23)$$

pentru o funcție $v : \mathbb{R}_+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. În plus

$$\pi_t(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left(e^{-r(T-t)} g(f(W_T^*, T)) | \mathcal{F}_t^{W^*} \right),$$

unde $f : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție strict pozitivă, dată prin

$$f(x, t) = S_0 e^{\sigma x + (r - \sigma^2/2)t}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notăm

$$u(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left(e^{-r(T-t)} g(f(W_T^*, T)) | W_t^* = x \right).$$

Conform teoremei anterioare, $u(x, t)$ satisface ecuația cu derivate parțiale

$$-u_t'(x, t) = \frac{1}{2} u_{xx}''(x, t) - ru(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \quad (24)$$

cu condiția terminală $u(x, T) = g(f(x, T))$.

Din formulele (21) și (23) obținem că

$$u(x, t) = v(f(x, t), t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T].$$

Prin urmare,

$$u_t'(x, t) = v_s'(s, t) f_t'(x, t) + v_t'(s, t),$$

unde am considerat $s := f(x, t) \in (0, +\infty)$. Mai mult,

$$u_x'(x, t) = v_s'(s, t) f_x'(x, t)$$

și deci

$$u_{xx}''(x, t) = v_{ss}''(s, t) (f_x'(x, t))^2 + v_s'(s, t) f_{xx}''(x, t).$$

Pe de altă parte, din formula de definire a funcției f , avem că

$$f_x'(x, t) = \sigma f(x, t), \quad f_{xx}''(x, t) = \sigma^2 f(x, t), \quad f_t'(x, t) = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) f(x, t),$$

ceea ce conduce la

$$u'_t(x, t) = s \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) v'_s(s, t) + v'_t(s, t) \quad \text{și}$$

$$u''_{xx}(x, t) = \sigma^2 s^2 v''_{ss}(s, t) + \sigma^2 s v'_s(s, t).$$

Substituind în ecuația (24) și rearanjând termenii obținem EDP Black Scholes (22).

Modelul studiat poate fi extins pentru situații în care dobânda la vedere, respectiv volatilitatea, sunt variabile, dar deterministe. De asemenea, el poate fi utilizat și pentru evaluarea prețului opțiunilor europene ce au active suport care plătesc dividende pe perioada de viață a derivatului financiar. În acest cadru se pot obține formule explicite ale prețului dacă dividendele reprezintă un procent cunoscut din prețul activului suport.

Deși modelul de evaluare Black-Scholes nu reflectă identic realitatea din piețele financiare, el este des folosit în practică deoarece permite calcularea cu ușurință a prețurilor și explicitează precis relațiile dintre variabilele care caracterizează sistemul. Unele voci chiar afirmă că modelul Black-Scholes nu este o reprezentare fidelă a modului de funcționare a piețelor financiare, însă, tocmai faptul că toți cei implicați "gândesc Black-Scholes" le conferă funcționalitate. Cu toate că în practică indicele de volatilitate ce apare în ecuația ce caracterizează dinamica activului primar nu este constant, rezultatele oferite de modelul Black-Scholes sunt frecvent utilizate, ele dovedindu-se eficiente la stabilirea corectă strategiilor de hedging ce permit minimizarea expunerii la risc a investitorilor. Instrumentele esențiale utilizate pentru evitarea expunerii la risc (*risk management*) sunt prezentate în secțiunea următoare.

6 Indici de sensibilitate ai modelului Black-Scholes

Indicii de sensibilitate (*the Greeks*) sunt instrumente importante pentru managementul riscului. Fiecare indice este o măsură a sensibilității portofoliului investitorului la mici variații ale unor parametri ai activelor primare. Indicii modelului Black-Scholes sunt ușor de calculat, ei fiind utili în special celor care sunt implicați în contracte ce tranzacționează derivate financiare, dându-le astfel posibilitatea să-si protejeze contra riscului din piață portofoliile. Principalii indici folosiți pentru hedging sunt: *delta*, *theta*, *vega* (măsoară modificări generate de momentul de maturitate și volatilitate), *rho* (măsoară sensibilitatea la fluctuațiile dobânzilor), *gamma* (măsoară sensibilitatea prețului opțiunilor în raport cu modificarea prețului activului de bază). Prezentăm în cele ce urmează câteva elemente descriptive ce caracterizează indicii prezentați anterior.

1. Delta $\left(\Delta = \frac{\partial v}{\partial S} \right)$

Indicele Δ măsoară rata de schimb a valorii opțiunii în raport cu modificarea prețului activului de baza. Indicele reprezintă de fapt cantitatea de activ suport ce trebuie păstrată în portofoliu pentru o acoperire la risc în ceea ce privește derivatul financiar. Chiar dacă delta va avea valori situate între 0 și 1 pentru un long call (sau/și un short call) și între 0 și -1 pentru un long put (sau/și un short put) aceste valori sunt rareori prezentate ca procente ale numărului de acțiuni ce fac obiectul contractului de tranzacționare. Suma între valorile absolute ale indicilor delta ai unui call și un put european (ce au același activ suport negrevat de dividende, același moment de maturitate și același preț de exercitare) este egală cu 1.

2. Vega $\left(\nu = \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)$

Indicele ν măsoară sensibilitatea la volatilitate activului suport al opțiunii. El este exprimat în mod uzual drept suma de bani (pe unitatea de acțiune de activ suport) pe care valoarea opțiunii o câștigă sau o pierde atunci când volatilitatea crește sau scade cu 1%. Acest indice este important de urmărit de către trader-ul opțiunii, în special în piețe financiare foarte volatile deoarece strategiile de tranzacționare pot fi gestionate pentru neexpunerea la risc a investitorului prin intermediul acestui instrument.

3. Theta $\left(\theta = \frac{\partial v}{\partial t} \right)$

Indicele θ măsoară sensibilitatea valorii derivatului financiar pe parcursul trecerii timpului (*time decay*). Valoarea sa este, de obicei, reprezentată sub forma valoare/an. În mod uzual se dividează rezultatul la numărul de zile din an pentru a se ajunge la suma pe unitatea de activ suport pe care opțiunea o pierde pe zi. Theta este întotdeauna negativ pentru un long call/put și pozitiv pentru un short call/put.

4. Rho $\left(\rho = \frac{\partial v}{\partial r} \right)$

Indicele ρ măsoară sensibilitatea valorii opțiunii la modificări ale dobânzilor la vedere ale activului fără risc din piață. În marea majoritate a situațiilor valoarea derivatului financiar este puțin sensibilă la aceste

modificări, ceea ce face ca acest indice de sensibilitate să nu fie unul prea des utilizat. Rho se exprimă prin suma pe unitatea de activ suport pe care prețul opțiunii o câștigă sau o pierde atunci când obânda la vedere pentru activul sigur crește sau scade cu 1%.

5. **Gamma** $\left(\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \right)$

Indicele Γ măsoară rata de modificare a indicelui Δ în raport cu schimbările de preț ale activului suport. Gamma este un instrument important deoarece atunci când un trader dorește să realizeze un delta-hedging eficient pentru un portofoliu el încearcă să anuleze indicele gamma al acestuia. În acest fel se asigură că strategia de protecție la risc va fi eficientă pentru o varietate mare de schimbări ale prețului activului suport al derivatului financiar.

Tabelele de mai jos oferă formulele explicite ale indicilor de sensibilitate, în funcție de: prețul activului suport S , prețul de exercitare K , dobânda la vedere (*spot*) r , dividendele anuale q plătite de activul suport (în caz că acestea există) și volatilitatea σ .

Opțiune call europeană	
Valoare	$e^{-q(T-t)}SN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$
Delta	$e^{-q(T-t)}N(d_1)$
Vega	$Se^{-q(T-t)}N(d_1)\sqrt{T-t}$
Theta	$-e^{-q(T-t)}\frac{SN(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) + qSe^{-q(T-t)}N(d_1)$
Rho	$K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$
Gamma	$e^{-q(T-t)}\frac{N(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$
Opțiune put europeană	
Valoare	$e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - e^{-q(T-t)}SN(-d_1)$
Delta	$-e^{-q(T-t)}N(-d_1)$
Vega	$Ke^{-r(T-t)}N(d_2)\sqrt{T-t}$
Theta	$-e^{-q(T-t)}\frac{SN(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) - qSe^{-q(T-t)}N(-d_1)$
Rho	$-K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Gamma	$e^{-q(T-t)}\frac{N(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$

O vizualizare grafică a dinamicii indicilor de sensibilitate ai modelului Black-Scholes poate fi studiată în fișierul atașat [Capitolul_3_Vizualizare_indici_de_senzitivitate_BS.m](#).

7 Aplicații

1. a. Evaluați, pentru $t > 0$, cantitatea

$$\mathbb{P}(S_{2t} > 2S_t),$$

unde S este soluția EDS liniare

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

b. Determinați variația prețului activului suport: $D^2(S_t)$.

Demonstrație. a. Inegalitatea ce trebuie demonstrată este echivalenta cu

$$e^{2\mu t - \sigma^2 t + \sigma W_{2t}} > 2e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t},$$

ceea ce implică, logaritmând și efectuând simple calcule algebrice,

$$W_{2t} - W_t > \frac{1}{\sigma} (\ln 2 - \mu t + \sigma^2 t).$$

Avem că $W_{2t} - W_t = \sqrt{t}X$, unde $X \sim N(0, 1)$, iar $W_{2t} - W_t \sim N(0, t)$. Prin normalizare,

$$\frac{W_{2t} - W_t}{\sqrt{t}} = X \sim N(0, 1).$$

Obținem că probabilitatea evenimentului dorit este

$$\mathbb{P} \left(\sqrt{t}X > \frac{1}{\sigma} \left(\ln 2 - \mu t + \frac{\sigma^2}{2} t \right) \right) = 1 - \Phi \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left(\ln 2 - \mu t + \frac{\sigma^2}{2} t \right) \right).$$

b. Vom evalua dispersia solicitată folosind formula standard

$$D^2(S_t) = \mathbb{E}(S_t - \mathbb{E}(S_t))^2 = \mathbb{E}(S_t^2) - (\mathbb{E}(S_t))^2.$$

Având în vedere formula explicită a lui S_t ,

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t},$$

deducem că media sa este egală cu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t) &= \mathbb{E} \left(S_0 \exp \left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t \right) \right) = S_0 \exp(\mu t) \mathbb{E} \left(\exp \left(-\sigma^2 t/2 + \sigma W_t \right) \right) \\ &= S_0 \exp(\mu t) \mathbb{E} \left(\exp \left(-\sigma^2 t/2 + \sigma W_t \right) \mid \mathcal{F}_0 \right) = S_0 \exp(\mu t) \exp \left(-\sigma^2 0/2 + \sigma W_0 \right) = S_0 \exp(\mu t). \end{aligned}$$

Ultima egalitate din estimarea precedentă rezultă din faptul că procesul stochastic $M_t := \exp \left(-\sigma^2 t/2 + \sigma W_t \right)$ este un proces martingal, el satisfăcând EDS liniară:

$$dM_t = \sigma M_t dW_t.$$

Obținem astfel că dispersia prețului activului suport este:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t - S_0 e^{\mu t})^2 &= S_0^2 e^{2\mu t} \mathbb{E} \left(\exp \left(-\frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W_t \right) - 1 \right)^2 \\ &= S_0^2 e^{2\mu t} \mathbb{E} \left(\exp \left(-\sigma^2 t + 2\sigma W_t \right) - 2 \exp \left(-\frac{\sigma^2 t}{2} + \sigma W_t \right) + 1 \right). \end{aligned} \tag{25}$$

Tinând cont că $W(t) \sim N(0, t)$, deducem următoarea evaluare a primei medii din formula (25):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\exp \left(-\sigma^2 t + 2\sigma W_t \right) \right) &= \mathbb{E} \left(\exp \left(-\sigma^2 t + 2\sigma \sqrt{t}X \right) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\sigma^2 t + 2\sigma \sqrt{t}x \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-x^2/2 \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\sigma^2 t \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2}(x - 2\sigma \sqrt{t})^2 + 2\sigma^2 t \right) dx = e^{\sigma^2 t}. \end{aligned}$$

Procedăm într-o manieră similară cu cea de a doua medie din formula (25) și găsim că

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t \right) \right) = 1.$$

Prin urmare,

$$D^2(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

2. Presupunem că procesul $(S_t)_{t \geq 0}$ urmează modelul standard Black-Scholes ($\mathbb{P}^*$ fiind măsura martingală a pieței financiare) și considerăm o constantă $\gamma \in \mathbb{R}$. Să se afle valoarea lui $\gamma \neq 1$ astfel încât procesul stochastic $\{(S_t)^\gamma e^{-\gamma r t}\}_{t \geq 0}$ să fie o $\mathbb{P}^*$ -martingală. Prin r am notat dobânda *short term* a activului fără risc.

Demonstrație. Considerăm dinamica activului suport ca fiind guvernată de EDS liniară, considerată sub măsura martingală $\mathbb{P}^*$ și în raport cu procesul Wiener transformat W^* ,

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^*.$$

Definim procesul stochastic ponderat X , dat prin:

$$X_t := (S_t)^\gamma e^{-rt}$$

Acesta satisface EDS

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(-rX_t + \gamma rX_t + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)X_t \right) dt + \gamma\sigma X_t dW_t^* \\ &= X_t \left(r(\gamma-1) + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1) \right) dt + \gamma\sigma X_t dW_t^* \\ &= X_t(\gamma-1) \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma \right) dt + \gamma\sigma X_t dW_t^*. \end{aligned} \quad (26)$$

Pentru ca X să fie martingală este necesar să avem coeficientul de drift egal cu zero, adică γ trebuie să rezolve ecuația

$$(\gamma-1) \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma \right) = 0.$$

Cum $\gamma \neq 1$, aceasta implică $\gamma = -2r/\sigma^2$.

Remarcăm că EDS satisfăcută de X , sau direct, coeficientul său de drift, pot fi deduse plecând de la forma explicită a soluției S , de la care putem determina forma explicită a lui X :

$$\begin{aligned} X_t &= (S_t)^\gamma e^{-rt} = S_0^\gamma \left(\exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t^* \right) \right)^\gamma \exp(-rt) = S_0^\gamma \exp \left(\gamma \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \gamma\sigma W_t^* - rt \right) \\ &= S_0^\gamma \exp \left(\left(\gamma \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) - r \right) t + \gamma\sigma W_t^* \right) = S_0^\gamma \exp \left(\left((\gamma-1)r - \gamma\frac{\sigma^2}{2} \right) t + \gamma\sigma W_t^* \right) \\ &= S_0^\gamma \exp \left(\left((\gamma-1)r - \gamma\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2} - \frac{\gamma^2\sigma^2}{2} \right) t + \gamma\sigma W_t^* \right) \\ &= S_0^\gamma \exp \left(\left((\gamma-1)r + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2(\gamma-1) - \frac{\gamma^2\sigma^2}{2} \right) t + \gamma\sigma W_t^* \right) \\ &= S_0^\gamma \exp \left(\left((\gamma-1) \left(r + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 \right) - \frac{\gamma^2\sigma^2}{2} \right) t + \gamma\sigma W_t^* \right). \end{aligned}$$

Prin urmare, X verifică (26), raționamentul privind condiția martingală putând continua în aceeași manieră ca înainte.

Verificăm acum că X satisface condițiile necesare de integrabilitate ale momentului absolut de ordinul 1. Ecuația (26) conduce, în ipoteza că driftul este acum zero, la soluția explicită

$$X_t = X_0 \exp \left(\frac{-2r^2}{\sigma^2} t - \frac{2r}{\sigma} W_t^* \right).$$

Cum $X_0 = S_0^\gamma > 0$, vom arata că X este o martingală în raport cu $\mathbb{P}^*$. Verificăm, pentru început, condiția ca $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$. Cum, pentru o variabilă aleatoare $Y \sim N(0, 1)$ rezultă că $W_t = \sqrt{t}Y \sim N(0, t) = \sqrt{t}N(0, 1)$, avem că

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_t|) &= \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E} \left(X_0 \exp \left(\frac{-2r^2}{\sigma^2} t - \frac{2r}{\sigma} W_t^* \right) \right) = X_0 \exp \left(\frac{-2r^2}{\sigma^2} t \right) \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{-2r}{\sigma} W_t^* \right) \right) \\ &= X_0 \exp \left(\frac{-2r^2}{\sigma^2} t \right) \mathbb{E} \exp \left(\frac{-2r}{\sigma} \sqrt{t} Y \right) = X_0 \exp \left(\frac{-2r^2}{\sigma^2} t \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{-2r}{\sigma} \sqrt{t} y \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(\frac{-y^2}{2} \right) dy \\ &= X_0 \exp \left(\frac{-2r^2}{\sigma^2} t + \frac{2r^2}{\sigma^2} t \right) = X_0 < \infty. \end{aligned}$$

În concluzie, procesul X este o $\mathbb{P}^*$ -martingală.

3. Arătați că procesul $X_t := \exp(t/2) \cos W_t$, unde W este un proces Wiener, este o martingală.

Demonstrație. Fie $X_t := f(t, W_t) = \exp(t/2) \cos W_t$. Vom determina dinamica sa folosind formula lui Itô. Obținem astfel:

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW_t = \left(\frac{1}{2} \exp\left(\frac{t}{2}\right) \cos W_t - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{t}{2}\right) \cos W_t \right) dt - \exp\left(\frac{t}{2}\right) \sin W_t dW_t \\ &= -\exp\left(\frac{t}{2}\right) \sin W_t dW_t. \end{aligned}$$

Acest proces nu are coeficientul de drift și, în plus, termenul de volatilitate are momentul de ordin 2 finit. Într-adevăr, folosind proprietatea de izometrie a integralei stochastice Itô, se verifică mărginirea următoare:

$$\mathbb{E} \left(\left(\int_0^t -\exp\left(\frac{s}{2}\right) \sin W_s dW_s \right)^2 \right) = \int_0^t \mathbb{E} (e^s \sin^2 W_s) ds \leq \int_0^t \mathbb{E} (e^s) ds = e^t - 1 < \infty.$$

În concluzie, procesul X este o martingală.

4. Rezolvați următoarea EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} = 0, & t \in [0, T], x \in \mathbb{R}, \\ f(T, x) = e^x, \end{cases} \quad (27)$$

folosind formula de reprezentare Feynman-Kač, unde μ și σ sunt două constante reale.

Demonstrație. Formula lui Feynman-Kač oferă o reprezentare a soluțiilor unor clase de ecuații cu derivate parțiale, folosind proprietățile probabilistice ale proceselor stochastice. Rezultatul Feynman-Kač stabilește că soluția EDP (27) poate fi scrisă ca următoarea valoare medie condiționată:

$$f(t, x) = \mathbb{E} (e^{X_T} \mid X_t = x),$$

unde X este un proces Itô care este soluția următoarei EDS liniare:

$$\begin{cases} dX_s = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \sigma dW_s, & t \leq s \leq T, \\ X_t = x. \end{cases}$$

Prin integrare, obținem

$$\int_t^T dX_s = \int_t^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma dW_s$$

adică, folosind condiția inițială $X_t = x$,

$$X_T = x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma(W_T - W_t)$$

Analizând procesul stochastic exponențial $\exp(X_T)$, vedem că are exact aceeași distribuție ca și mișcarea Browniană geometrică în modelul standard Black-Sholes. Obținem astfel că:

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \mathbb{E} (\exp(X_T) \mid X_t = x) = \mathbb{E} \left(e^x \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma(W_T - W_t) \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \exp \left(x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma(W_T - W_t) \right) \\ &= \exp(x + \mu(T - t)) \mathbb{E} \left(\exp \left(-\frac{\sigma^2}{2} (T - t) + \sigma(W_T - W_t) \right) \right) \\ &= \exp(x + \mu(T - t)). \end{aligned} \quad (28)$$

De asemenea, ar trebui să verificăm că soluția obținută verifică condiția la limită din ecuația cu derivate parțiale din enunțul problemei. Avem astfel:

$$f(T, x) = e^{x+0\mu} = e^x.$$

Pentru a finaliza demonstrația, avem în vedere forma explicită (28) a lui f , și obținem că:

$$\begin{cases} f_t(t, x) = \frac{\partial \exp(x + \mu(T - t))}{\partial t} = -\mu \exp(x + \mu(T - t)) = -\mu f(t, x) \\ f_x(t, x) = \frac{\partial \exp(x + \mu(T - t))}{\partial x} = f(t, x) \quad \text{și} \quad f_{xx}(t, x) = f(t, x) \end{cases}$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} \\ = -\mu f(t, x) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) f(t, x) + \frac{\sigma^2}{2} f(t, x) = 0. \end{aligned}$$

Prin urmare, soluția obținută prin formula (28) este corectă, în sensul că ea verifică EDP (27).

5. Considerăm, în modelul de piață Black-Scholes, derivatul financiar cu funcția de plată

$$\Pi(S_T) := (K - S_T^2)^+ = \max(K - S_T^2, 0).$$

a. Determinați, în modelul de piață fără arbitraj, formula prețului derivatului financiar, la orice moment $0 \leq t \leq T$.

b. Identificați portofoliul replicant al derivatului financiar, adică găsiți o strategie autofinanțantă care să implice activul suport și contul de economii fără risc, care să replice corect valoarea derivatului financiar la momentul de maturitate T .

Demonstrație.

a. Sub măsura martingală $\mathbb{P}^*$ a pieței financiare Black-Scholes avem că activul suport are următoarea reprezentare, în raport cu procesul Wiener transformat W^* ,

$$S_T = S_t \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma (W_T^* - W_t^*) \right).$$

Conform formulei de evaluare la risc neutru, costul derivatului financiar $\Pi_t = F(t, S_t)$ este dat de următoarea medie condiționată:

$$\begin{aligned} F(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (\Pi(S_T) \mid \mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (\Pi(S_T) \mid S_t) \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (\max(K - S_T^2, 0) \mid S_t) \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left(\left(K - S_t^2 \exp \left(2 \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + 2\sigma(W_T^* - W_t^*) \right) \right) \right. \\ &\quad \cdot \mathbf{1}_{\exp((r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W_T^*-W_t^*)) \leq (\sqrt{K}/S_t)} \mid S_t \Big) \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left(\left(K - S_t^2 \exp \left(2 \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + 2\sigma\sqrt{T-t} \cdot Z \right) \right) \cdot \mathbf{1}_{Z \leq \frac{\ln(\sqrt{K}/S_t) - (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} \mid S_t \right), \end{aligned}$$

unde $Z \sim N(0, 1)$.

Notăm cu

$$d_1 := \frac{\ln \left(\frac{\sqrt{K}}{S_t} \right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

și exprimăm media din formula lui F sub forma unei integrale:

$$\begin{aligned}
F(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} \exp(-x^2/2) dx - \frac{S_t^2}{\sqrt{2\pi}} \exp((r - \sigma^2)(T-t)) \int_{-\infty}^{d_1} \exp\left(2x\sigma\sqrt{T-t} - \frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= e^{-r(T-t)} \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} \exp(-x^2/2) dx \\
&\quad - \frac{S_t^2}{\sqrt{2\pi}} \exp((r - \sigma^2)(T-t)) \int_{-\infty}^{d_1} \exp\left(-\frac{1}{2}(-4x\sigma\sqrt{T-t} + x^2 + 4\sigma^2(T-t) - 4\sigma^2(T-t))\right) dx \\
&= e^{-r(T-t)} \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} \exp(-x^2/2) dx \\
&\quad - \frac{S_t^2}{\sqrt{2\pi}} \exp((r - \sigma^2)(T-t)) \int_{-\infty}^{d_1} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - 2\sigma\sqrt{T-t})^2\right) \exp(2\sigma^2(T-t)) dx \\
&= e^{-r(T-t)} \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} \exp(-x^2/2) dx - \frac{S_t^2}{\sqrt{2\pi}} \exp((r + \sigma^2)(T-t)) \int_{-\infty}^{d_1 - 2\sigma\sqrt{T-t}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\
&= e^{-r(T-t)} K \cdot N(d_1) - S_t^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} \cdot N(d_1 - 2\sigma\sqrt{T-t}),
\end{aligned}$$

unde N este funcția de repartiție normală standard.

b. Fie acum

$$h := (h_b, h_s)$$

o strategie autofinanțantă, cu valoarea portofoliului

$$V(t) = h_b(t)B_t + h_s(t)S_t.$$

Condiția de autofinanțare conduce la dinamica lui V dată de

$$dV(t) = h_b(t)dB_t + h_s(t)dS_t.$$

Vrem acum să alegem h_b și h_s astfel încât V și prețul derivatului financiar să aibă aceeași dinamică. Condiția de replicare conduce la faptul că putem alege

$$h_s(t) := \frac{\partial}{\partial S_t} F(t, S_t)$$

și, din moment ce ar trebui să avem $V_t = F(t, S_t)$, obținem

$$h_b(t) = \frac{F(t, S_t) - h_s(t)S_t}{B_t} = \frac{F(t, S_t) - S_t \frac{\partial}{\partial S_t} F(t, S_t)}{B_t}.$$

Folosind valoarea lui F , obținută la punctul precedent, deducem

$$\begin{cases} h_s(t) &= \frac{\partial}{\partial S_t} F(t, S_t) = -2S_t \exp((r + \sigma^2)(T-t)) \cdot N(d_1 - 2\sigma\sqrt{T-t}) \\ h_b(t) &= \frac{e^{-r(T-t)} K \cdot N(d_1) - (S_t^2 - 2S_t^2) \exp((r + \sigma^2)(T-t)) \cdot N(d_1 - 2\sigma\sqrt{T-t})}{e^{rt}} \\ &= \frac{e^{-r(T-t)} K \cdot N(d_1) + S_t^2 \exp((r + \sigma^2)(T-t)) \cdot N(d_1 - 2\sigma\sqrt{T-t})}{e^{rt}}. \end{cases}$$

O altă metodă de obținere a rezultatului dorit este formula lui Itô, aplicată funcției $\Pi_t = F(t, S_t)$. Mai precis, obținem că aceasta verifică următoarea EDS neliniară:

$$\begin{aligned}
d\Pi_t &= \left(\frac{\partial}{\partial t} F(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} F(t, S_t) \right) dt + \frac{\partial}{\partial S_t} F(t, S_t) dS_t \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} F(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} F(t, S_t) \right) \frac{rB_t}{rB_t} dt + \frac{\partial}{\partial S_t} F(t, S_t) dS_t \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} F(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} F(t, S_t) \right) \frac{1}{rB_t} dB_t + \frac{\partial}{\partial S_t} F(t, S_t) dS_t.
\end{aligned}$$

Prin urmare, definim componentele portofoliului replicant astfel:

$$\begin{cases} h_b(t) &:= \left(\frac{\partial}{\partial t} F(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} F(t, S_t) \right) \frac{1}{rB_t} \\ h_s(t) &:= \frac{\partial}{\partial S_t} F(t, S_t) \end{cases}$$

și obținem că valoarea portofoliului V și costul derivatului financiar Π au aceeași dinamică. Putem simplifica în continuare utilizând $V_t = \Pi_t = F(t, S_t)$ (ceea ce rezulta și din faptul că F satisface EDP Black-Sholes) și obținem în final faptul că

$$h_b(t) = \frac{F(t, S_t) - h_s S_t}{B_t} = \frac{F(t, S_t) - S_t \frac{\partial}{\partial S_t} F(t, S_t)}{B_t}.$$

Demonstrația este, în acest moment, încheiată.

6. Presupunem că avem o piață formată dintr-un activ riscant $S^{(1)}$ și un cont bancar $S^{(0)}$, ce au dinamica, sub $\mathbb{P}$,

$$\begin{cases} dS_t^{(1)} &= \mu_1 S_t^{(1)} dt + S_t^{(1)} (\sigma_{11} dW_t^{(1)} + \sigma_{12} dW_t^{(2)}) \\ dS_t^{(0)} &= r S_t^{(0)} dt, \end{cases}$$

unde $W_t^{(1)}$ și $W_t^{(2)}$ sunt două mișcări Browniene standard, independente. Vom demonstra că modelul este fără arbitraj dar incomplet, adică există măsura martingală a pieței financiare, însă aceasta nu este unică.

a. Arătați că prețul corect al derivatului financiar $X = \Phi(S_T^{(1)})$, cu maturitatea T , nu depinde de modul în care alegem măsura martingală.

b. Evaluați prețul creanței (derivatului financiar) $Y = \mathbf{1}_{\{W_T^{(2)} > K\}}$ (un contract care plătește o unitate monetară la momentul T doar dacă $W_T^{(2)} > K$). Cum interpretați acest rezultat în comparație cu ce s-a obținut la punctul precedent?

c. Arătați că, adăugând în piața financiară încă un activ riscant, $S^{(2)}$, ce are, sub $\mathbb{P}$, dinamica dată de următoarea EDS liniară:

$$dS_t^{(2)} = \mu_2 S_t^{(2)} dt + \sigma_{22} S_t^{(2)} dW_t^{(2)},$$

atunci piața va fi fără arbitraj și, în plus, completă.

Demonstrație.

a. Indiferent de alegerea măsurii martingale $\mathbb{Q}$, avem că $S^{(1)}$ va avea dinamica, sub $\mathbb{Q}$,

$$dS_t^{(1)} = r S_t^{(1)} dt + S_t^{(1)} (\sigma_{11} dW_t^{(1), \mathbb{Q}} + \sigma_{12} dW_t^{(2), \mathbb{Q}}),$$

unde $W^{(1), \mathbb{Q}}$ și $W^{(2), \mathbb{Q}}$ sunt mișcările Browniene standard sub $\mathbb{Q}$, obținute prin transformarea clasică prezentată în cazul obținerii măsurilor martingale pentru modelul financiar considerat. Prin urmare, obținem că activul suport riscant $S^{(1)}$ va avea următoarea reprezentare explicită:

$$S_T^{(1)} = S_t^{(1)} \exp \left(\left(r - \frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2}{2} \right) (T - t) + \sigma_{11} (W_T^{(1), \mathbb{Q}} - W_t^{(1), \mathbb{Q}}) + \sigma_{12} (W_T^{(2), \mathbb{Q}} - W_t^{(2), \mathbb{Q}}) \right),$$

proces stochastic care are aceeași distribuție ca și

$$S_t^{(1)} \exp \left(\left(r - \frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2}{2} \right) (T - t) + \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2} \sqrt{T - t} Z \right), \quad \text{unde } Z \sim N(0, 1).$$

Astfel, folosind formula de evaluare la risc neutru, prețul la momentul t , $\pi_t(\Phi(S_T^{(1)}))$ al derivatului financiar cu maturitatea T și cu funcția de plată $\Phi(S_T^{(1)})$ este dat de

$$\begin{aligned}\pi_t(\Phi(S_T^{(1)})) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-r(T-t)} \Phi(S_T^{(1)}) \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left(S_t \exp \left(\left(r - \frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2}{2} \right) (T-t) + \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2} \sqrt{T-t} z \right) \right) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz,\end{aligned}$$

valoarea obținută fiind indiferentă de alegerea măsurii martingale $\mathbb{Q}$.

b. Dinamica, sub $\mathbb{Q}$, a mișcării Browniene $W^{(2)}$ este dată de:

$$dW_t^{(2)} = dW_t^{(2),\mathbb{Q}} - g_2(t)dt$$

unde $g_1(t), g_2(t)$ sunt funcții care satisfac ecuația

$$\mu_1 - \sigma_{11}g_1(t) - \sigma_{12}g_2(t) = r, \quad \text{pentru } 0 \leq t \leq T. \quad (29)$$

De asemenea, aceste funcții verifică condiția de integrabilitate

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\exp \left(\int_0^T \frac{g_1(s)^2 + g_2(s)^2}{2} ds \right) \right) < \infty.$$

Este clar că ecuația funcțională (29) nu admite soluție unică. Două posibilități de alegere pentru funcțiile g_1 și g_2 astfel încât acestea să verifice ecuația (29) sunt:

$$(g_1(t), g_2(t)) = \left(\frac{\mu_1 - r}{\sigma_{11}}, 0 \right), \quad \text{respectiv} \quad (g_1(t), g_2(t)) = \left(0, \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{12}} \right).$$

Aceste două alegeri vor furniza prețuri diferite ale derivatului financiar $\mathbf{1}_{W_T^{(2)}}$, mai exact

$$\pi_t^1(Y) = e^{-r(T-t)} N \left(\frac{W_t^2 - K}{\sqrt{T-t}} \right) \quad \text{și, respectiv,} \quad \pi_t^2(Y) = e^{-r(T-t)} N \left(\frac{W_t^2 - K - \frac{\mu_1 - r}{\sigma_{12}}(T-t)}{\sqrt{T-t}} \right)$$

c. Perechea de funcții $(g_1(t), g_2(t))$ trebuie să rezolve următorul sistem de ecuații liniare:

$$\begin{cases} -\sigma_{11}g_1(t) - \sigma_{12}g_2(t) = r - \mu_1 \\ -\sigma_{22}g_2(t) = r - \mu_2 \end{cases} \quad (30)$$

În ipoteza că $\sigma_{11}, \sigma_{22} \neq 0$, sistemul (30) admite o soluție unică:

$$g_1(t) = \frac{\mu_1 - r - \sigma_{12} \frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}}}{\sigma_{11}} \quad \text{și} \quad g_2(t) = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_{22}}.$$

Demonstrația este completă.

7. Dat un Call European C și un Put European P , ambele având același activ suport, același moment de maturitate T și același preț de exercitare K , arătați că

$$\Delta_C - \Delta_P = 1.$$

Demonstrați că $\Gamma_P = \Gamma_C$.

Demonstrație. Din formula de paritate Put-Call, avem că

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)},$$

pentru orice $t \in [0, T]$. Cum operatorul $\Delta = \partial v / \partial S$ este un operator liniar, rezultă imediat că

$$\Delta_{C-P} = \Delta_C - \Delta_P = 1.$$

Dar, pe de altă parte,

$$\Delta_C = e^{-q(T-t)}N(d_1) = N(d_1)$$

deoarece, activul suport fiind neplătitor de dividende, $q = 0$. Prin urmare,

$$\Delta_P = N(d_1) - 1 = -(1 - N(d_1)) = -N(-d_1).$$

Având în vedere că formula indicelui *Gamma* este $\Gamma = \partial\Delta/\partial S$, rezultă concluzia dorită:

$$\Delta_C = \Delta_P = \frac{N(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Demonstrația este încheiată.

8. Arătați că

$$\theta_P = \theta_C + rKe^{-r(T-t)},$$

unde C și P reprezintă opțiuni de cumpărare, respectiv de vânzare, ce au același activ suport, dată de maturitate și preț de exercitare. Determinați formula explicită a indicelui θ_P .

Demonstrație. Din formula de paritate rezultă că

$$\theta_{C-P} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial (C_t - P_t)}{\partial t} = \frac{\partial (S_t - Ke^{-r(T-t)})}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}.$$

Liniaritatea operatorului de diferențiere conduce la:

$$\begin{aligned}\theta_P &= \theta_C + rKe^{-r(T-t)} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}}N(d_1) - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) + rKe^{-r(T-t)} \\ &= -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}}N(d_1) + rKe^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}}N(d_1) + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2).\end{aligned}$$

Demonstrația este încheiată.

Probleme propuse.

1. Considerăm următoarea variantă a modelului Ornstein-Uhlenbeck: presupunem că prețul unui activ suport riscant are dinamica dată de EDS

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma dW_t, \quad S_0 \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Determinați probabilitatea ca, la un moment $t_1 \geq 0$, S să devină negativ, adică

$$\mathbb{P}(S_{t_1} < 0).$$

Exemplificați pentru $S_0 = 100$, $\mu = 0.10$, $\sigma = 30$.

2. Stabilim L ca fiind variabila aleatoare ce măsoară câștigul / pierderea unei activități investiționale în modelul de piață fără arbitraj Black-Scholes. Valoarea la risc, la nivelul de încredere α se definește ca fiind următoarea cantitate:

$$\nu := \inf \left\{ x : \mathbb{P}(L \leq x) \geq \frac{\alpha}{100} \right\}.$$

Calculați ν pentru $\alpha = 5$, unde L este pierderea posibilă cauzată de o investiție într-o singură unitate de activ suport S (stock), achiziționată la prețul $S_0 = 100$ și vândută la prețul S_T , în condiția în care $\mu = 0.10$, $\sigma = 0.40$ și $T = 1$.

3. Considerăm modelul Bachelier, adică presupunem că prețul activului suport este dat de formula explicită:

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0,$$

iar rata dobânzii pentru activul neriscant este $r = 0$. Determinați formula prețului, la momentul $t = 0$, al unui derivat de tip Call European ce are ca activ suport activul menționat mai sus.

4. Considerăm că prețul unui activ suport verifică EDS liniară:

$$dS_t = \mu(t) S_t dt + \sigma(t) S_t dW_t, \quad S_0 \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (31)$$

iar funcțiile coeficient μ și σ sunt continue și mărginite. Arătați că procesul stochastic

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s \right)$$

este UNICA soluție a dinamicii (31).

Demonstrație (idee). Presupunem, prin metoda reducerii la absurd, că S_1 și S_2 sunt două posibile soluții pentru (31). Scriem (31) sub formă integrală pentru cele două procese S_1 și S_2 , scădem ecuațiile, ridicăm diferența la pătrat, iar argumente precum $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, proprietatea de izometrie a integralei stochastice și Lema lui Gronwall conduc la rezultatul dorit.

5. Fie W^1 și W^2 două procese Wiener independente și $\rho \in [-1, 1]$ o constantă dată. Demonstrați că coeficientul de corelație între variabilele aleatoare

$$W_t^1 \quad \text{și} \quad \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2$$

este ρ , pentru orice $t \geq 0$.

6. Presupunem că prețul S al unui activ suport în modelul de piață financiară Black-Scholes evoluează după o mișcare Browniană geometrică, ce are coeficientul de drift $\mu = 0.30$ și cel de volatilitate $\sigma = 0.20$. Prețul la momentul inițial este presupus a fi $S_0 = 100\$$. Presupunem că rata anuală a dobânzii lipsite de risc (*short term interest rate*) pentru contul bancar este $r = 0.025$.

- Determinați repartiția prețului activului suport la momentul $T = 2$ ani. Care este media și dispersia variabilei aleatoare S_t , pentru fiecare moment $t \in [0, T]$?
- Care este probabilitatea ca acest preț să fie cuprins între 95 și 105?
- Calculați prețul la momentul inițial al unui derivat financiar ce conferă deținătorului său dreptul de a **vinde** la paritate (adică cu prețul de exercitare $K = S_0 = 100\$$) activul suport la momentul de maturitate $T = 2$ ani.
- Calculați prețul la momentul inițial al unui derivat financiar ce conferă deținătorului său dreptul de a **cumpăra** la paritate activul suport la orice moment premurgător momentului de maturitate $T = 2$ ani. Ce puteți spune despre contractul similar ce oferă celui aflat în poziția short dreptul de a vinde activul suport, în aceleași condiții referitoare la momentul de exercitare a derivatului financiar.
- Determinați indicele de sensibilitate care măsoară rata de variație a valorii contractului de la punctul (c), în raport cu prețul activului suport.

Bibliografie

- [1] Bielecki, T; Jeanblanc, M; Rutkowski M., *Introduction to Mathematics of Credit Risk Modeling*, Stochastic Models in Mathematical Finance, CIMPA-UNESCO-MOROCCO School, Marrakech, Morocco, April 9-20, 2007.
- [2] Bremaud, P., *An Introduction to Probabilistic Modeling*, Springer-Verlag, 1988.
- [3] Cox, J.C.; Ross. S.A., *The valuation of options for alternative stochastic processes*, J. Finan. Econom. 3, pp. 145-166, 1976.
- [4] Cox, J.C.; Ross. S.A.; Rubinstein, M., *Option Pricing: A Simplified Approach*, J. Finan. Econom., September, 1979.
- [5] Evens, L., *An introduction to stochastic differential equations*, Department of Mathematics, UC Berkeley, preprint.
- [6] Hull, J. C., *Options, Futures and Other Derivatives*, 4th ed., Prentice Hall, 1999.
- [7] Karatzas, I.; Shreve, S.E., *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, N.Y, 1998.
- [8] Malliaris, A. G., *Itô's calculus in financial decision making*, SIAM Review 25, pp. 481-496, 1983.
- [9] Merton, R. C., *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science 4 (1), pp. 141-183, 1973.
- [10] Musiela, M; Rutkowski, M., *Martingale Methods in Financial Modelling*, second edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [11] Oksendal, B. K., *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 4th ed., Springer-Verlag, 1995.